Prof. Amador Martin-Pizarro | Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick | Wintersemester 2022/2023

Modelltheorie

Blatt 9

Abgabe: 16.01.2023, 17 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

Sei λ eine unendliche Kardinalzahl. Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion einer linearen Ordnung der Kardinalität echt größer als λ mit einer dichten Teilmenge der Größe höchstens λ.

Dazu wähle eine Kardinalzahl μ kleinstmöglich mit $2^\mu > \lambda$ (wieso gibt es ein solches μ?) und betrachte die Menge

$$P = \{f : \mu \to 2 \mid \text{ es existiert kein } \alpha < \mu \text{ mit } f(\beta) = 1 \text{ für alle } \beta > \alpha\}$$

a) Zeige, dass die Vorschrift $f < g \Leftrightarrow$ es gibt ein $\alpha < \mu$ mit $f\restriction_\alpha = g\restriction_\alpha$ und $f(\alpha) < g(\alpha)$ eine lineare Ordnung auf P definiert.

b) Zeige, dass $Q = \{f \in P \mid \text{ es existiert ein } \alpha < \mu \text{ mit } f(\beta) = 0 \text{ für alle } \beta > \alpha\}$ dicht in P (bezüglich der Topologie mit Basis aller offenen Intervalle) ist.

c) Zeige, dass P Kardinalität $2^\mu > \lambda$ hat, jedoch Q höchstens der Mächtigkeit λ ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**

Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und $\phi[x, y]$ eine $\mathcal{L}$-Formel derart, dass für jedes n aus $\mathbb{N}$ ein Modell $\mathcal{M}_n \models T$ sowie Elemente $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ existieren mit $\mathcal{M}_n \models \phi[a_i, b_j] \Leftrightarrow i \leq j$.

a) Zeige, dass es für jede unendliche lineare Ordnung I ein Modell $\mathcal{M} \models T$ mit einer ununterscheidbaren Folge $(a_i, b_i)_{i \in I}$ so gibt, dass $\mathcal{M} \models \phi[a_i, b_j] \Leftrightarrow i \leq j$ in I.

b) Zeige, dass T nicht ω-stabil sein kann.

   Hinweis: Setze $I = \mathbb{Q}$ und betrachte Typen über $B = \{b_q\}_{q \in \mathbb{Q}}$

c) Schließe daraus, dass die Theorie DLO in der Sprache $\mathcal{L} = \{<\}$ nie λ-stabil ist.

   Hinweis: Setze I die Ordnung aus der Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

Beschreibe den definierbaren und algebraischen Abschluss der endlichen Teilmengen A in den folgenden $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$:

a) Für $\mathcal{M}$ den abzählbaren Zufallsgraph in der Sprache $\mathcal{L} = \{R\}$.

b) Für $\mathcal{L} = \{E\}$ und $\mathcal{M}$ den Fraïssé Limes der Klasse $\mathcal{K}$ aller endlich erzeugten $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ für die $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation ist, deren Klassen alle höchstens 3 Elemente besitzen (vgl. Blatt 8, Aufgabe 1).

Nun betrachte den Körper $\mathbb{R}$ in der Ringsprache (siehe Blatt 2, Aufgabe 2 b)).

c) Für n ungerade sei die Formel $\phi[x, \bar{y}] = x^n + y_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + y_0 = 0$ gegeben. Zeige, dass für jedes Tupel $\bar{a}$ aus $\mathbb{R}$ die Elemente der Erfüllungsmenge $\phi[\mathbb{R}, \bar{a}]$ definierbar über $\bar{a}$ sind.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 2.30 im Keller des mathematischen Instituts.